Huk, V.I., & Zaporozhtseva, H.V. (2022). Theory of quantitative analysis of the states of transport flows. *The First Special Humanitarian Issue of Ukrainian Scientists. European Scientific e-Journal*, *2* (17), 24-39. Ostrava: Tuculart Edition. (in Ukraininan)
Гук, В.І. і Запорожцева, О.В. (2022). Теорія кількісного аналізу станів транспортних потоків. *The First Special Humanitarian Issue of Ukrainian Scientists. European Scientific e-Journal*, *2* (17), 24-39. Ostrava: Tuculart Edition.

DOI: 10.47451/inn2022-03-01

The paper will be published in Crossref, ICI Copernicus, J-Gate, ISI, Academic Resource Index ResearchBib, Internet Archive, Google Scholar, eLibrary, Ukrainian National Library databases.

Valeriy I. Huk, Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Volodymyr Dahl East Ukrainian National University, Luhansk/Sievierodonetsk, Ukraine. ORCID: 0000-0003-4198-7027.
Helena V. Zaporozhtseva, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Road University, Kharkiv, Ukraine. ORCID: 0000-0002-4975-8643.

Theory of quantitative analysis of the states of transport flows

Abstract: The effective use of the provisions of the traffic flow states theory for practical purposes becomes possible only when theoretical concepts acquire a concrete and precise character in a quantitative form. At the same time, the completeness of quantitative information sufficient for technical applications has been achieved, when each of the quantities important for the transport process will be defined as a function of arguments, characterizing the traffic flow movement. To solve the problems of the organization of motor transport road traffic based on the synthesis of the theory of traffic flows states and the theory of similarity and dimensionality, new complex criteria for evaluating congestions of states and traffic control algorithms are presented. The authors conclude that the application of the generalized variables method makes it possible to obtain not only a quantitative assessment of various sections of streets and roads from the standpoint of traffic safety and efficiency, but also to determine criteria for traffic management, which are the basis of real-time control algorithms.

Keywords: flow rate, speed, density, transport time, traffic intensity, parametric type criteria, complex type criteria.



Валерій Іванович Гук, доктор технічних наук професор, Східноукраїнський національний університет ім. Володимира Даля, Луганськ/Сєвєродонецьк, Україна.
ORCID: 0000-0003-4198-7027.
Олена Володимирівна Запорожцева, кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожний університет, Харків, Україна.
ORCID: 0000-0002-4975-8643.

Теорія кількісного аналізу станів транспортних потоків

Анотация: Ефективне використання положень теорії станів транспортного потоку в практичних цілях стає можливим тільки в тому випадку, коли теоретичні уявлення набувають конкретного і точного характеру в кількісній формі. При цьому досягнута повнота кількісної інформації, достатньої для технічних застосувань, коли кожна з величин, важливих для транспортного процесу, буде визначена, як функція аргументів, що характеризують рух транспортного потоку. Для вирішення проблем організації дорожнього руху автомобільного транспорту на фундаменті

синтезу теорії станів транспортних потоків і теорії подібності і розмірності наводяться нові комплексні критерії оцінки конгестії станів і алгоритми керування рухом. Автори роблять висновок що застосування методу узагальнених змінних дозволяє одержати не тільки кількісну оцінку різних ділянок вулиць і дорогий з позиції безпеки і ефективності дорожнього руху, але і визначити критерії для управління дорожнім рухом, які є основою алгоритмів управління в реальному масштабі часу.

Ключові слова: кількість потоку, швидкість, щільність, транспортний час, напружність руху, критерії параметричного типу, критерії комплексного типу.



Валерий Иванович Гук, доктор технических наук професор, Восточноукраинский национальный университет им. Владимира Даля, Луганск/Северодонецк, Украина.
ORCID: 0000-0003-4198-7027.
Елена Владимировна Запорожцева, кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Харьков, Украина.
ORCID: 0000-0002-4975-8643.

Теория количественного анализа состояний транспортного потока

Аннотация: Эффективное использование положений теории состояний транспортного потока в практических целях становится возможным только в том случае, когда теоретические представления приобретают конкретного и точного характера в количественной форме. При этом достигнута полнота количественной информации, достаточной для технических применений, когда каждая из величин, важных для транспортного процесса, будет определена, как функция аргументов, характеризующих движение транспортного потока. Для решения проблем организации дорожного движения автомобильного транспорта на фундаменте синтеза теории состояний транспортных потоков и теории сходства и размерности приводятся новые комплексные критерии оценки конгестии состояний и алгоритмы управления движением. Авторы делают вывод, что применение метода обобщенных переменных позволяет получить не только количественную оценку различных участков улиц и дорог с позиции безопасности и эффективности дорожного движения, но и определить критерии для управления дорожным движением, которые являются основой алгоритмов управления в реальном масштабе времени.

Ключевые слова: количество потока, скорость, плотность, транспортный час, напряженность, критерии параметрического типа, критерии комплексного типа.



Використання методу узагальнених змінних для кількісного аналізу транспортного потоку

Ефективне використання положень теорії станів транспортного потоку (*Гук і Шкодовський, 2009*) в практичних цілях стає можливим тільки в тому випадку, коли теоретичні уявлення набувають конкретного і точного характеру в кількісній формі. При цьому досягнута повнота кількісної інформації, достатньої для технічних застосувань,

коли кожна з величин, важливих для транспортного процесу, буде визначена, як функція аргументів, що характеризують рух транспортного потоку.

Здебільшого на практиці спроба знайти аналітичне рішення в задачах організації руху і проектування доріг і вулиць натрапляє на значні, а іноді і непереборні труднощі, викликані складністю транспортного процесу і громіздкістю математичного апарату. Тому частими є результати, які в кращому випадку мають характер наближеної оцінки, в гіршому – неправильні по суті і тому є причиною помилок.

Все це зовсім не означає, що взагалі неможливо одержати кількісні результатів в транспортних розрахунках. Тим паче, що кількісна сторона транспортної проблеми привертає до себе увагу в більшій мірі, ніж будь-коли раніше.

Нині кількісні співвідношення вивчаються достатньо енергійно, але в основному числовими методами на основі експериментальних спостережень. Хоча результати числового рішення виражають великий обсяг корисних знань, але вони не визначають внутрішніх причинно-наслідкових зв'язків, що характеризують транспортний потік.

Розрізнені окремі експериментальні залежності, що пов'язують одну з одною окремі змінні (інтенсивність – швидкість, інтенсивність – кількість ДТП, швидкість – інтервали та ін.), не з'єднані загальним рівнянням, більше не можуть привести до повної і виразної картини, тим паче, що вони характеризують тільки те місце, де спостерігалися.

Проте числові методи можуть бути істотно посилені за допомогою інших засобів дослідження, які ґрунтуються на аналізі фізичного механізму транспортного потоку, що приводять до важливих співвідношень, які не вдається одержати іншими засобами. Як показує досвід, синтез цих співвідношень і даних числового розв'язання або експерименту є надзвичайно плідним (*Алабужев, 1968*; *Вильсон, 1978*; *Гухман, 1973*).

Для визначення кількісних співвідношень замінимо звичні змінні потоку транспорту величинами комплексного типу, які складені з тих самих змінних, але в певних поєднаннях, що залежать від природи транспортного потоку. Комплексні змінні згідно з (*Вильсон, 1978*; *Гухман, 1973*) є узагальненими змінними та визначаються на основі теорії подібності і розмірностей або методу узагальненого аналізу. Цей метод базується на послідовному використанні безрозмірних величин – критеріїв подібності і відносних змінних. Як відомо, критерії подібності є двоякого роду комбінації постійних параметрів. Це критерії параметричного типу, що є простим відношенням однойменних параметрів, і критерії комплексного типу, які об'єднують в собі різнорідні параметри. Відносні змінні є відокремленими від розподілу змінних на постійні параметри.

На цій основі визначимо критерії подібності $П_п$, які надалі використовуємо і як параметри, і як змінні транспортного потоку, представивши їх добутком різних ступенів безрозмірних величин.

Нехай є n розмірних величин p_I, $i = 1,2,3...,$ $n,$ які характеризують транспортний потік. При цьому як основні одиниці вимірювання транспортного потоку приймемо:

1) автомобіль *[a],* чим узагальнюються його геометричні і динамічні параметри;
2) протяжність *[L],* (метри, км) дороги, автомобіля, динамічного габариту, поперечного перетину дороги тощо;
3) час *[T]* (с, год).

Розмірність будь-якої величини p буде виражена через основні одиниці вимірювання, тобто

$$[p_i] = [L]^{\varphi_i}[A]^{\mu_i}[T]^{\tau_i} \quad \text{i=1,2,3.,n. (1)}$$

Як відомо, будь-який критерій подібності — це деяка комбінація величин $p_1 ..., p_n$. Тоді

$$\Pi = p_1^{z_1}, p_2^{z_2}, \dots, p_n^{z_n} = \Theta[p_1]^{z_1}[p_2]^{z_2} \dots [p_n]^{z_n},$$

де Θ – безрозмірна величина, або

$$\Pi = \Theta[L^{\varphi_1}A^{\mu_1}T^{\tau_1}][L^{\varphi_2}A^{\mu_2}T^{\tau_2}] \dots [L^{\varphi_n}A^{\mu_n}T^{\tau_n}]$$
$$= \Theta[L]^{\varphi_1 z_1 + \dots + \varphi_n z_n)}[A]^{(\mu_1 z_1 + \dots + \mu_n z_n)}[T]^{(\tau_1 z_1 + \dots + \tau_n z_n)} \ (2)$$

Оскільки критерії подібності – величини нульової розмірності, то

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 z_1 + \varphi_2 z_2 \dots + \varphi_n z_n &= 0 \\ \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 \dots + \mu_n z_n &= 0 \\ \tau_1 z_1 + \tau_2 z_2 \dots + \tau_n z_n &= 0 \end{aligned}\right\}. \ (3)$$

Отже, одержали систему трьох рівнянь з невідомими $z_1, z_2, \dots, z_n$. Для визначення числа незалежних змінних складемо матриці

$$\begin{vmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n \\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_n \\ \tau_1, \tau_2, \dots \tau_n \end{vmatrix} \ (4)$$

Позначимо через m ранг матриці, тоді система рівнянь (4), як відомо, матиме n-m незалежних

$$z_1{}^{(1)}, z_2{}^{(1)}, z_3{}^{(1)}, \dots, z_n{}^{(1)},$$
$$z_1{}^{(2)}, z_2{}^{(2)}, z_3{}^{(2)}, \dots, z_n{}^{(2)},$$
$$\dots,$$
$$z_1{}^{(n-m)}, z_2{}^{(n-m)}, z_3{}^{(n-m)}, \dots, z_n{}^{(n-m)}.$$

Відповідно до (2) кожне рішення $(z_1^{(i)}, z_2^{(j)}, \dots, z^{(l)})$ дозволяє одержати один критерій подібності, тому n-m незалежних рішень додадуть n-m незалежних критеріїв.

Використовуючи відому в теорії подібності П-теорему, визначимо критерії подібності (*Алабужев, 1968*).

$$\Pi_1 = \frac{p_1}{p_1^{\varphi_1} p_2^{\mu_1} \dots p_n^{\tau_1}}, \Pi_2 = \frac{p_2}{p_2^{\varphi_2} p_2^{\mu_2} \dots p_n^{\tau_2}}, \Pi_{n-m} = \frac{p_n}{p_1^{\varphi_n} p_2^{\mu_n} \dots p_n^{\tau_n}}.$$

Оскільки критерії подібності П, $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-m}$, безрозмірні величини, тому їх прийнято представляти у вигляді (*Вильсон, 1978*; *Гухман, 1973*)

$$\Pi = f(1,1, \dots, 1, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-m}). \ (5)$$

З виразу (5) видно, що чим менше число параметрів, що визначають величину, яка вивчається в транспортному потоці, тим більше обмежена форма функціональної залежності, отже, тим простіше буде вести дослідження.

Розглянемо ряд задач транспортного потоку з метою встановлення узагальнених критеріїв, що характеризують стан транспортного процесу.

Визначення структури кількісних співвідношень, характерних для транспортного потоку

Як зазначалося вище, для розв'язання транспортних задач у кількісній формі необхідне послідовне використання безрозмірних величин, тобто критеріїв подібності і відносних змінних. При цьому «розв'язання задачі представляється у формі рівнянь в

безрозмірних величинах, якими шукані відносні змінні визначаються як однозначні функції незалежних відносних змінних і критеріїв подібності, що грають роль постійних параметрів» (*Гухман, 1973:54*). Таким чином, загальний тип рівняння буде

$$Y = f\ x, 1_2 x, \dots \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \Pi_1, \Pi_2. \ (6)$$

де Y – шукана змінна транспортного потоку;

x – незалежна змінна;

$\mathfrak{I}$ – критерії комплексного типу;

П – критерії параметричного типу.

Вигляд функції (6) в кінцевому вираженні не визначається.

Найбільша повнота знань про процес руху транспортного потоку при кількісному дослідженні буде досягнута, коли будуть знайдені розподіли змінних в просторі і часі. Сукупність миттєвих значень, безперервно розподілених в просторі, у фізиці прийнято називати полем (*Гухман, 1973*).

Розглянемо послідовно ряд задач процесу руху автомобілів у транспортному потоці і самого потоку, що ускладнюється.

Спочатку виявимо процес зміни динамічного габариту (відповідно і дистанції) автомобіля в транспортному потоці через близькість автомобілів на просторовій осі проїжджої частини.

Розміри динамічного габариту S визначимо такими величинами:

V – швидкість автомобіля, км/год; м/сек;

Q – щільність потоку, авт/км; авт/м;

x – протяжність ділянки смуги руху, км; м;

a – прискорення автомобіля, км/год; м/сек;

N – інтенсивність потоку, авт/год; авт/сек;

або

$$S = f(x, V, Q, N, a). \ (7)$$

Цілком зрозуміло, що аналітичне отримання залежності виду (7) важке, експериментальне визначення надзвичайно трудомістке, оскільки вимагається визначити зв'язок між шістьма величинами. Проте, перейшовши до критеріїв подібності, замість n=6 величин одержимо n-m=6-3=3 критерії подібності. Знайти зв'язок між трьома величинами значно легше. Приймемо як основні незалежні змінні x, V, Q, тоді відповідний визначник буде

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді

$$\frac{S}{V^{\mu_1} x^{\varphi_1} Q^{\tau_1}} = F\left(\frac{N}{V^{\mu_2} x^{\varphi_2} Q^{\tau_2}}, \frac{a}{V^{\mu_3} x^{\varphi_3} Q^{\tau_3}}\right).$$

Перетворюючи, одержимо для динамічного габариту

$$\frac{[S]}{[V]^{\mu_1}[x]^{\varphi_1}[Q]^{\tau_1}} = 1, \frac{[A]^{-1}[L]}{([L][T]^{-1})^{\mu_1}[L]^{\varphi_1}([A][L]^{-1})^{\tau_1}} = 1.$$

або

$$[A]^{-1-\tau_1}[L]^{+\mu_1}[T]^{-\mu_1+1-\varphi_1+\tau_1} = 1.$$

Для інтенсивності

$$\frac{[N]}{[V]^{\mu_2}[x]^{\varphi_2}[Q]^{\tau_2}}=1;\ \frac{[A][T]}{([L][T]^{-1})^{\mu_2}[L]^{\varphi_2}([A][L]^{-1})^{\tau_2}}=1,$$

або

$$[A]^{1-\tau_2}[L]^{\tau_2-\mu_2-\varphi_2}[T]^{\mu_2-1}=1.$$

Для прискорення

$$\frac{[a]}{[V]^{\mu_3}[x]^{\varphi_3}[Q]^{\tau_3}}=1;\ \frac{[L][T]^{-2}}{([L][T]^{-1})^{\mu_3}[L]^{\varphi_3}([A][L]^{-1})^{\tau_3}}=1,$$

або

$$[A]^{-\tau_3}[L]^{1-\mu_3-\varphi_3+\tau_3}[T]^{\mu_3-2}=1$$

Звідки знаходимо

$$\left.\begin{matrix}1-\tau_1=0\\ \mu_1=0\\ 1-\varphi_1-\mu_1+\tau_1\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}1-\tau_2=0\\ \tau_2-\mu_2-\varphi_2=0\\ \mu_2-1=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}-\tau_3=0\\ 1-\mu_3-\varphi_3+\tau_3=0\\ \mu_3-2=0\end{matrix}\right\},$$

$$\tau_1=-1;\ \mu_1=0;\ \varphi_1=0;\ \tau_2=1;\ \mu_2=1;\ \varphi_2=0;\ \tau_3=0;\ \mu_3=2;\ \varphi_3=-1.$$

Отже, критерії подібності будуть

$$\Im_2=\frac{N}{VQ};\Pi_1=SQ;\ \Im_3=\frac{xa}{V^2}\quad (8)$$

$і\ \Pi=\Phi(\Im_2,\Im_3)$, звідки для динамічного габариту можна написати

$$S=\frac{1}{Q}\Phi\left(\frac{N}{VQ},\frac{xa}{V^2}\right).\quad (9)$$

Проаналізуємо одержані критерії подібності (.9) за умови, що вони постійні.

З першого критерію Π_1 видно, що динамічний габарит автомобілів в потоці залежить зворотно-пропорційно тільки від щільності транспортного потоку Q ($S=Q^{-1}$). Це критерій параметричного типу, але широко застосовується в прикладних розрахунках.

Другий критерій – $\Im_2$ указує, що збільшити розміри інтенсивності *N* транспортного потоку на ділянці смуги руху можна тільки зі збільшенням швидкості потоку *V*, або зі зменшенням відстані між автомобілями, тобто збільшивши щільність потоку. Критерій $\Im_2$ характеризує міру відношення між інтенсивністю потоку і пропускною можливістю ділянки. В практичних розрахунках цей критерій, як відношення N/N_m, застосовується для оцінки рівня завантаження дороги і рівня зручності руху. Тому критерій $\Im_2$ є узагальненим критерієм для оцінки транспортного процесу і враховує вплив стану доріг на зменшення швидкості руху. Позначимо його як критерій **Б**. У транспортній теорії співвідношення $\Im_2$ відоме як рівняння стану потоку.

Критерій $\Im_3$ характеризує відносну (у зіставленні з інерційними) величину динамічних можливостей автомобіля, і тому він є істотним, коли автомобіль рухається в потоці з частими обгонами і різкими прискореннями. Ним враховується шум прискорення.

З вимоги постійності критерію $\Im_3$, позначимо його **С**, витікає, що швидкісні можливості автомобіля *xa* мають перевищувати швидкість транспортного потоку V_i;

$$C=\frac{xa}{V_i^2},V_i=\left(\sqrt{xa}\middle|C=1\right)\quad (10)$$

Критерій **С** враховує вплив транспортного потоку на швидкість руху автомобіля в потоці і, крім того, він указує, що кількісне значення швидкості транспортного потоку істотно залежить від довжини ділянки, на якій ця швидкість визначається, а це не завжди враховується в експериментальних спостереженнях.

Розглянемо процес руху транспортного потоку через перетин дороги і лінію «стоп». Параметрами і змінними транспортного потоку при русі через перетин дороги будуть:

N – інтенсивність авт/год;

B – ширина проїжджої частини в перетині, м;

b – ширина автомобіля, м;

Q – щільність потоку, авт/км;

V – швидкість руху, км/год.

Зміна інтенсивності транспортного потоку є функцією

$$N = f(B, b, Q, V) \ \ (11)$$

Приймемо за основні одиниці *B, V, Q*. Відповідний визначник при цьому буде.

Виразивши величини формули (11) в цих одиницях, одержимо зв'язок між безрозмірними комплексами:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Виразив величини формули (11) в цих одиницях, одержимо зв'язок між безрозмірними комплексами:

$$\frac{N}{B^{\mu} Q^{\varphi} V^{\tau}} = f\left(\frac{b}{B}\right).$$

Оскільки ліва частина – безрозмірна величина, то:

$$\frac{[N]}{[B]^{\mu}[Q]^{\varphi}[V]^{\tau}} = 1; \ \ \frac{[A][T]^{-1}}{[L]^{\mu}([A][L]^{-1})^{\varphi}([L][T]^{-1})\tau} = 1$$

або

$$[A]^{1-\varphi}[L]^{\varphi-\mu-\tau}[T]^{\tau-1} = 1.$$

Звідки

$$\left.\begin{matrix} 1-\varphi = 0 \\ \varphi-\mu-\tau = 0 \\ \tau - 1 = 0 \end{matrix}\right\} \ \begin{matrix} \varphi = 1 \\ \tau = 1 \\ \mu = 0 \end{matrix}$$

або

$$\frac{N}{B^0 Q^1 V^1} = f\left(\frac{B^{-1}}{b^{-1}}\right), \qquad \Im_1 = f(\Pi_2),$$

де коефіцієнти подібності

$$\Im_1 = \Im_2 = \frac{N}{QV}, \Pi = \Pi_4 = \frac{b}{B} \ \ (12)$$

У даному випадку критерій подібності $\Im$, визначений нами раніше як критерій **Б.** Про його узагальненість також указувалось.

Критерій подібності $\mathbf{\Pi_4}$ характеризує використовування проїжджої частини транспортним потоком по ширині дороги і є при постійних розмірах смуги руху і

ширини проїжджої частини параметричним числом. Для смуги руху шириною 3,5м **П$_4$** знаходиться в межах 0,714-0,73, для смуги в 3,75 м – 0,68-0,594.

Визначимо тепер критерії при русі транспортних засобів через лінію «стоп» після зупинки.

Параметрами і змінними транспортного потоку в цьому випадку будуть:

$$N, x, l_a, Q, a,$$

де x – довжина перегону, м;
l_a – довжина автомобіля, м; тобто:

$$N = f(x, l_a, Q, a).$$

Тоді, при основних одиницях x, Q, a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Враховуючи, що:

$$\frac{N}{x^{\mu} Q^{\varphi} a^{\tau}} = f\left(\frac{1_a}{X}\right)$$

$$\frac{[N]}{[x]^{\mu}[Q]^{\varphi}[a]^{\tau}} = 1$$

$$\frac{[A][T]^{-1}}{[L]^{\mu}([A][L]^{-1})^{\varphi}([L][T]^{-2})^{\tau}} = 1,$$

тобто

$$[A]^{1-\varphi}[L]^{\varphi-\mu-\tau}[T]^{2\tau-1} = 1.$$

Звідки

$$\left.\begin{matrix} 1-\varphi = 0 \\ \varphi-\mu-\tau = 0 \\ 2\tau-1 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \varphi = 1 \\ \tau = 1/2. \\ \mu = 1/2 \end{matrix}$$

Тому

$$\frac{N}{x^{\mu} Q^{\varphi} a^{\tau}} = f\left(\frac{1_a}{x}\right)$$

$$\Pi = \frac{1_a}{x}; \ \Im_6 = \frac{N}{Q\sqrt{xa}}.$$

Якщо замінити $\sqrt{xa} = V$, то критерій $\Im_6$ буде аналогічний до критерію **Б**, проте в даному випадку він показує, що зі збільшенням протяжності шляху інтенсивність пропорційно зменшується. Критерій параметричного вигляду **П$_5$** дозволяє оцінити, яка частка простору дороги доводиться на І автомобіль. Якщо за x прийняти протяжність дороги, то **П$_5$** має техніко-економічний сенс, якщо за x прийняти динамічний габарит S, то **П$_5$** має значення під час оцінки безпечних умов руху.

Розглянемо рух транспортного потоку через лінію «стоп» з урахуванням затримок і руху без затримок, тобто

$$N = f(x, l_a, Q, V, a) \ (14)$$

Основні змінні потоку Q, V, a

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\frac{N}{Q^{\mu_1}V^{\varphi_1}a^{\tau_1}} = f\left(\frac{x}{Q^{\mu_2}V^{\varphi_2}a^{\tau_2}}, \frac{1}{Q^{\mu_3}V^{\varphi_3}a^{\tau_3}}\right)$$

або

$$\frac{[N]}{[Q]^{\mu_1}[V]^{\varphi_1}[a]^{\tau_1}} = 1; \quad \frac{[A][T]^{-1}}{([A][L]^{-1})^{\mu_1}([L][T]^{-1})^{\varphi_1}([L][T]^{-1})^{\tau_1}} = 1.$$

Звідки знаходимо

$$\left.\begin{aligned} 1 - \mu_1 = 0 \\ \mu_1 - \varphi_1 - \tau_1 = 0 \\ \varphi_1 + 2\tau_1 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \mu_1 = 1 \\ \tau_1 = 1. \\ \varphi_1 = 1 \end{aligned}$$

Отже

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_2 = \frac{N}{QV} = \text{Б}. \ (15)$$

$$\frac{[x]}{[Q]^{\mu_2}[V]^{\varphi_2}[a]^{\tau_2}} = 1; \quad \frac{[L]}{([A][L]^{-1})^{\mu_2}([L][T]^{-1})^{\varphi_2}([L][T]^{-1})^{\tau_2}} = 1$$

або

$$[A]^{-\mu_2}[L]^{1+\mu_2-\varphi_2-\tau_2}[T]^{\varphi_2+2\tau_2} = 1.$$

$$\left.\begin{aligned} -\mu_2 = 0 \\ 1 + \mu_2 - \varphi_2 - \tau_2 = 0 \\ \varphi_2 + 2\tau_2 = 0 \end{aligned}\right\}, \quad \begin{aligned} \mu_2 = 0 \\ \varphi_2 = 2. \\ \tau_2 = 0 \end{aligned}$$

Отже,

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_3 = \frac{xa}{V^2} = \text{Б}. \ (16)$$

У даному випадку одержали узагальнені критерії дорожньої **Б** і транспортної **С** складових, які є кількісною характеристикою руху транспортного потоку.

Для більш повної характеристики станів руху транспортного потоку визначимо можливі критерії при оцінці умов руху в просторі і в часі. Характеризуватимемо транспортний потік всіма вище одержаними параметрами і змінними. Такий підхід дозволить одержати найбільший різновид кількісних співвідношень. Врахуємо:

- протяністжь смуги руху x, км; *[L];*
- час руху *T,* год; [T];
- швидкість потоку *V,* км/год;
- щільність потоку *Q,* авт/км;
- кількість потоку *λ,* авт; [A];
- інтенсивність *N*, авт/год.;
- потужність руху *M,* авт. км/год; $[A][T]^{-2}$ *[L];*
- кількість руху Д, авт. км; [A][L];
- роботу потоку *H,* авт. км/год;
- динамічний габарит *S*, км/авт;
- інерційність потоку *J,* авт. год/км;
- напруженість руху *C,* км.год/авт,$[L][T][A]^{-1}$;
- габаритна довжина автомобіля l_a, м;
- прискорення автомобіля *a,* м/с, $[L][T]^2$.

Тепер інтенсивність транспортного потоку на одній смузі визначимо, як функцію вищезгаданих величин:

$$N = f(x, T, V, Q, M, Д, H, S, J, C, l_a, a). \ (17)$$

З вказаних величин одержимо *n–m* критеріїв подібності. Оскільки $m = 3$, то критеріїв буде 14-3 = 11. За основні одиниці приймаємо протяжність *x,* швидкість *V* і *λ* – кількість потоку. Відповідний визначник буде мати вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді:

$$\frac{N}{x^{\varphi_1}\lambda^{\mu_1}V^{\tau_1}} = f\left(\frac{T}{x^{\varphi_2}\lambda^{\mu_2}V^{\tau_2}}, \frac{Q}{x^{\varphi_3}\lambda^{\mu_3}V^{\tau_3}}, \frac{M}{x^{\varphi_4}\lambda^{\mu_4}V^{\tau_4}}, \frac{Д}{x^{\varphi_5}\lambda^{\mu_5}V^{\tau_5}}, \frac{H}{x^{\varphi_6}\lambda^{\mu_6}V^{\tau_6}}, \frac{S}{x^{\varphi_7}\lambda^{\mu_7}V^{\tau_7}}, \frac{J}{x^{\varphi_8}\lambda^{\mu_8}V^{\tau_8}}, \frac{C}{x^{\varphi_9}\lambda^{\mu_9}V^{\tau_9}}, \frac{l_a}{x^{\varphi_{10}}\lambda^{\mu_{10}}V^{\tau_{10}}}, \frac{a}{x^{\varphi_{11}}\lambda^{\mu_{11}}V^{\tau_{11}}}\right).$$

Знайдемо $\mathfrak{I}_1$:

$$\frac{[N]}{[x]^{\varphi_1}[\lambda]^{\mu_1}[V]^{\tau_1}} = 1; \ \frac{[A][T]^{-1}}{[x]^{\varphi_1}[A]^{\mu_1}([L][T]^{-1})^{\tau_1}} = 1,$$

або

$$[A]^{1-\mu_1}[L]^{-\varphi_1-\tau_1}[T]^{\tau_1-1} = 1.$$

Звідки:

$$\left.\begin{array}{r} 1-\mu_1 = 0 \\ -\varphi_1-\tau_1 = 0 \\ \tau_2 - 1 = 0 \end{array}\right\}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = 1 \\ \varphi_1 = 1. \\ \tau_1 = 1 \end{array}$$

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_2 = \frac{Nx}{\lambda V}; \ \mathfrak{I}_6 = f(\mathfrak{I}_7, \dots, \mathfrak{I}_{16}). \ (18)$$

Тоді

$$N = \frac{\lambda V}{x} f(\mathfrak{I}_7, \dots, \mathfrak{I}_{16}).$$

Знайдемо $\mathfrak{I}_7$. Опускаючи математичні викладення, одержимо:

$$\mathfrak{I}_7 = \frac{TV}{x}; \ \mathfrak{I}_8 = \frac{Qx}{\lambda}; \ \mathfrak{I}_9 = \frac{Mx}{\lambda V^2}; \ \mathfrak{I}_{10} = \frac{Д}{\lambda x}; \ \mathfrak{I}_{11} = \frac{H}{\lambda V}; \ \mathfrak{I}_{12} = \frac{S\lambda}{x}; \ \mathfrak{I}_{13} = \frac{JV}{\lambda};$$

$$\mathfrak{I}_{14} = \frac{C\lambda V}{x^2}; \ \mathfrak{I}_{15} = \frac{ax}{V^2}; \ \mathfrak{I}_{16} = \frac{l_a}{x}. \ (19)$$

Узагальнюючи, знайдемо інтенсивність в просторовому уявленні

$$N = \frac{\lambda V}{x} f\left(\frac{TV}{x}, \frac{Qx}{\lambda}, \frac{Mx}{\lambda V^2}, \frac{Д}{\lambda x}, \frac{H}{\lambda V}, \frac{S\lambda}{x}, \frac{JV}{\lambda}, \frac{C\lambda V}{x^2}, \frac{ax}{V^2}, \frac{l_a}{x}\right). \ (20)$$

У часовому уявленні замість базового параметра *x* необхідно прийняти час *T*, тому ряд критеріїв зміниться. Так,

$$\mathfrak{I}_{17}=\frac{NT}{\lambda};\ \mathfrak{I}_{18}=\frac{x}{VT};\ \mathfrak{I}_{19}=\frac{QVT}{\lambda};\ \mathfrak{I}_{20}=\frac{MT}{\lambda V};\ \mathfrak{I}_{21}=\frac{Д}{\lambda VT};\ \mathfrak{I}_{22}=\frac{S\lambda}{VT};\ \mathfrak{I}_{23}=\frac{C\lambda}{VT^2};\ \mathfrak{I}_{24}=\frac{aT}{V};\ \mathfrak{I}_{25}=\frac{l_a}{VT}. \quad (21)$$

Тоді:

$$N_t=\frac{\lambda}{T}f\left(\frac{x}{VT},\frac{QVT}{\lambda},\frac{MT}{\lambda V},\frac{Д}{\lambda VT},\frac{H}{\lambda V},\frac{S\lambda}{VT},\frac{JV}{\lambda},\frac{C\lambda}{VT^2},\frac{aT}{V},\frac{l_a}{VT}\right). \quad (22)$$

Як бачимо з рівнянь (20) і (22), всі відношення, які стоять в правій частині, є комплексними і параметричними критеріями подібності.

Змінивши основні величини на інерційність *J*, напруженість *C* і швидкість *V*, одержимо наступну функціональну залежність інтенсивності від інших параметрів і змінних потоку

$$N_{np}=V\sqrt{\frac{J}{C}}f\left(\frac{T}{\sqrt{CJ}},\frac{x}{V\sqrt{JC}},Q\sqrt{\frac{C}{J}},\frac{M}{V}\sqrt{\frac{J}{C}},\frac{Д}{x^2}\sqrt{\frac{J}{C}},\frac{H}{Vx}\sqrt{\frac{J}{C}},S\sqrt{\frac{J}{C}},\frac{a\sqrt{CJ}}{V},\frac{l_aV}{\sqrt{CJ}}\right). \quad (23)$$

У рівнянні (23) з'явилися нові критерії, відмінність яких від попередніх полягає в тому, що щільність потоку *Q* представлена відношенням $\sqrt{(J\,/\,C)}$.

Безперечний науковий і практичний інтерес має сам аналіз одержаних кількісних співвідношень (критеріїв подібності), оскільки з'являється можливість розглядати з кількісної сторони умови руху транспортного потоку на різних ділянках вулиць і доріг одночасно з урахуванням впливу багатьох чинників.

Аналіз кількісних співвідношень і їх практичне застосування

По своїй значущості і для зручності аналізу і практичного вживання вони позначені в порядку алфавіту великими прописними буквами.

Аналіз кількісних співвідношень здійснимий за (*Гухман, 1973*), прийнявши їх значення постійними:

1. Критерій $А \equiv Nx/\lambda V$ є мірою відношення між макрорухом потоку і мікрорухом автомобілів, виражених через кількість потоку, на ділянці дороги довжиною $\boldsymbol{x}$. У часі мікрорух визначатиметься швидкістю збільшення кількості автомобілів в потоці, тобто λ/T і критерій **А** в цьому випадку буде мати іншу якісну форму $А \equiv TN/\lambda$. Якщо розглядати процес руху транспортного потоку як зміну дорожнього і транспортного потенціалів, що характерна біля регульованих перехресть, тоді мікрорух визначатиметься відношенням напруженості *C* до інерційності *J* і до середньої швидкості транспортного потоку. Критерій матиме вигляд

$$A_p=\frac{N\sqrt{\frac{C}{J}}}{V}.$$

2. Критерій $Б \equiv N/QV$ є мірою станів транспортного потоку. Це кількісна характеристика, проте, не розкриває якісної сторони процесу, оскільки при одному і тому ж значенні інтенсивності можливі два стану потоку, вільний рух і насичений. Все ж таки критерій **Б** властивий багатьом задачам.

3. Критерій В $\equiv TV/x$ встановлює співвідношення між характерним значенням часу *T*, як деяким періодом розвитку процесу руху (наприклад, сигнал світлофора, що дозволяє рух, цикл світлофора) і вимірником тривалісті рухи потоку по ділянці одиничної довжини *x*. Критерій **В** виник через нестаціонарність процесу руху транспортного потоку. Математичним аналогом критерію **В** у фізиці є число Струхала (Sh). Математичний вираз **В** залежить від постановки задачі.

Добуток критеріїв $A \times B = Eu$ соответствує відомому комплексу, званому у фізиці числом Ейлера (***Eu***), тобто $Eu \equiv Nx/QTV^2$. Вираз $\boldsymbol{QV^2}$, як масштаб віднесення, має застосовуватися при побудові безрозмірної форми будь-якого динамічного ефекту, що виникає в транспортному потоці, оскільки представляє собою потужність руху *M*. Звідси аналогом числа Ейлера в транспортному потоці буде комплекс, що є дуже цікавим відношенням розподіленої в просторі інтенсивності до розподіленої в часі потужності руху. Проте $MT = H$. тому рух транспортного потоку з інтенсивністю *N* по ділянці дороги довжиною *x* дорівнює роботі, виконаній потоком на цій ділянці за час його проходження.

При умові $\Im_{nm} = 1$ даний критерій дозволяє визначити відстань *x* до перетину, де інтенсивність через час *T* буде рівна спостережуваною в початковому перетині. Цей прогноз дуже важливий для управління дорожнім рухом, тим паче, що *N* і *V* постійно фіксуються в певних перетинах.

4. Критерій $\Gamma \equiv Qx/\lambda$ є відношенням фактичної щільності потоку до усередненої щільності. При рішенні задач руху в часі $x = Vt$, тоді $\Gamma \equiv QVT/\lambda$. Відношення λ/V представляє інерційність транспортного потоку, а добуток *QT* – опір руху усередині потоку під впливом щільності (близькості автомобілів в просторі дороги). Отже, критеріями **Г** змірює відношення інерційності потоку до внутрішнього опору руху. Поза сумнівом, одне з важливих співвідношенні, від якого залежать основні, найбільш глубоки властивості транспортного потоку. Пояснимо це твердження. Як відомо, рухомий транспортний потік знаходиться під впливом зовнішніх збурень, викликаних геометричними елементами вулиць і доріг, засобами організації дорожнього руху, пішоходами і т.д. Ці збурення поза сумнівом носять випадковий характер (*Сигорский, 1975*) і не пов'язані з механізмом потоку. Проте ефекти, що виникають в транспортному потоці під впливом збурень, розвиваються цілком закономірно і викликані вони саме механізмом процесу руху.

Внутрішній опір руху в потоці обумовлений близьким розташуванням автомобілів в потоці, тобто його щільністю. В щільному потоці нівелюються різні обурення, що порушують повільний колонний рух.

Діаметрально протилежну роль грає інерційність потоку, яка виникає як тільки починає збільшуватися відстань між автомобілями і створюються умови для вільнішого руху. В результаті водії збільшують швидкість автомобілів, що у свою чергу діє на потік обурюючи, підтримуючи і посилюючи неврегульованість руху.

Таким чином, збурення, що виникають в транспортному потоці, потрапляють під дію двох протилежно направлених впливів водіїв, з яких один прагне їх приглушити, а інше – посилити. Подальший розвиток процесу руху залежить від інтенсивності вказаних

явищ. Цим підтверджується реалізація руху транспортного потоку в двох зовсім різних формах. Перша – колонний рух – відрізняється впорядкованістю і простотою властивостей. Рух потоку і автомобілів в потоці знаходиться в повній відповідності один з одним. Для другої форми – вільний рух – характерний високий ступінь неврегульованості, пов'язаний з великою складністю властивостей. Відповідно рух транспортного потоку в цілому не визначає характеру руху його автомобілів. Видима постійність інтенсивності не виключає безперервної зміни умов руху в кожному перетині дороги, що виявляється в безперервному коливанні параметрів, які визначають стан потоку біля своїх середніх значень.

Виконане дослідження засновано на розумінні реального руху транспортного потоку як результату синтезу двох режимів руху – головного насиченого (колонного) і вільного. Питання про те, який саме режим руху транспортного потоку має встановитися в конкретних умовах, можна вирішити за допомогою відношення інерційності і внутрішнього опору.

Чисельне значення критерію **Г** не може бути строго пропорційне відношенню QVT/λ, оскільки в різних перетинах дороги це відношення може мати вельми різні значення, проте різним режимам руху за допомогою критерію **Г** додається кількісна оцінка. На рис.1 показаний графік чисельної зміни критерію **Г** при зростанні вільного руху. Кількісні значення різко збільшуються і при насиченні руху. Є критична точка **Г**= 100, одержана при Q = 50 авт/км; V = 50 км/год, T = I год, λ = 25 авт. відповідно до 2.5. Аналогом критерію **Г** у фізиці є критерій Рейнольдса.

5. Критерій $Д \equiv Mx/\lambda V^2$ – є різновидом критерію **А**, оскільки $M = NV$.

6. Критерій **Е** – це кількісна міра станів транспортного потоку. Критерій **Е** – різновид критерію **Б**. У фізиці аналогом критерію **Е** є число Ейлера (**Eu**), про яке згадувалось вище.

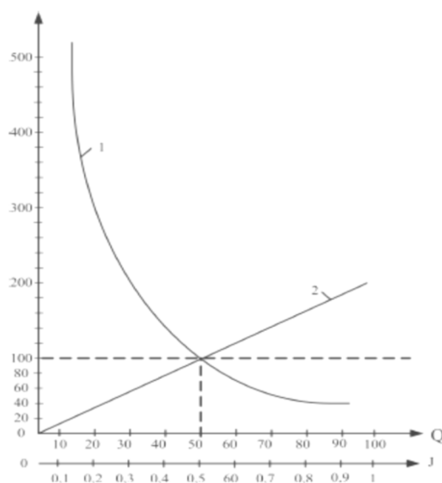


Рисунок 1. Характер зміни критерію Г
залежно від інерційності (I) і щільності (2)

7. Критерій $Ж \equiv Д/\lambda x$ є мірою між микро – і макростаном руху транспортного потоку. В цьому комплексі співвідносяться автомобілекилометри (кількість руху) одного автомобіля до кількості руху потоку на ділянці протяжністю *x*.

8. Критерій $З \equiv Д/Qx^2$ є різновидом вищезазначеного критерію **Ж**.

9. Критерій $И \equiv H/\lambda V$ дозволяє кількісно порівнювати роботу, виконану одним автомобілем, з роботою деякої кількості автомобілів. Даний критерій має безперечне техніко-економічне значення для аналізу роботи АТП і в техніко-економічних розрахунках.

10. Критерій **К** є різновид критерію **И.**

11. Критерій $Л \equiv S\lambda/x$ є кількісною мірою безпеки руху, оскільки оцінює зменшення (збільшення) необхідного з позиції безпеки руху динамічного габариту *S* в порівнянні з фактичним.

12. Критерій $М \equiv SQ$ є різновидом критерію **Λ.**

13. Критерій **Н**, кількісно оцінює відношення інерційності транспортного потоку до інерційності автомобіля в потоці і може застосовуватися при аналізі вільних умов руху. Даний критерій близький до критерію **Г**.

14. Критерій $О \equiv JV/Qx$ **О** $\equiv JV/Qx$ протилежний по кількісному визначенню критерію **Г**, тобто $О = 1/Г$.

15. Критерій $П \equiv C\lambda V/x^2$ оцінює напруженість, що виникає в транспортному потоці із зростанням його кількості з напруженістю, що доводиться на автомобіль потоку. Кількісний комплекс **П** дозволяє оцінити умови руху на підйомах, регульованих перехрестях, в передзаторовій ситуації.

16. Критерій $Р \equiv CQV/x$ є різновидом критерію **П**.

17. Критерій $С \equiv ax/V^2$ характеризує відносний вплив автомобілів один на одного, і тому він суттєвий для кількісної оцінки руху автомобілів в потоці за лідером. У вільнішому потоці критерій **С** вироджується.

18. Критерій $Т \equiv l_a/x$ має містобудівний сенс, так як указує величину простору вулиць і доріг, що доводиться на один автомобіль, а також порівнює автомобіль з дорогою. Докладніше він розглянутий в 5.2.

19. Критерій $У \equiv b/B$ характеризує умови руху на багатосмугових магістралях **У** = I для односмугової проїжджої частини. Чим менше критерій **У**, тим вище пропускна спроможність дороги. Для 4-х смугової дороги **У** = 0,25.

20. Критерій $Ф \equiv N/N_m$ – параметричного типа, як критерії від **Т** до **У**, а також **Ю**. Він характеризує використовування пропускної спроможності дороги і застосовується для оцінки зручності руху (*Сигорский, 1975*).

21-22. Критерій $\eta \equiv V/V_0$ і $\vartheta \equiv Q/Q_V$ розглядалися раніше (*Гук і Шкодовський, 2009*).

23. Критерій $Ц \equiv \lambda/\lambda_m$ оцінює груповий характер руху транспортного потоку по міських регульованих магістралях. Він дозволяє оцінити максимальне, з позиції пропускної спроможності, використовування принципу розбиття потоку на групи.

24. Критерій $Ч \equiv J/J_0$ є різновид критерію **Н**.

25. Критерій $Ш \equiv Ba/V^2$ є аналогом вищезазначеного критерію **С**, проте в критерії **Ш** , як характерний розмір, виступає не протяжність, а ширина дороги. В транспортній

науці відомі роботи по вивченню впливу ширини проїжджої частини на швидкість автомобілів (*Вильсон, 1978*; *Гухман, 1973*).

26. Критерій $Ю \equiv N/Q\sqrt{Ba}$ є аналогом критерію **Б** де, як швидкість автомобілів, враховується її розподіл по ширині проїжджої частини у вигляді $\sqrt{Ba}$.

Висновок

Таким чином, застосування методу узагальнених змінних дозволяє одержати не тільки кількісну оцінку різних ділянок вулиць і дорогий з позиції безпеки і ефективності дорожнього руху, але і визначити критерії для управління дорожнім рухом, які є основою алгоритмів управління в реальному масштабі часу.

Так, рекомендуються наступні алгоритми:

1. Розрахунок інтенсивності в *j*-перетині за спостереженнями в першому перетині

$$N_{ij} = \frac{NV(x_{ij},t)}{x_j};\ \frac{\lambda V(x_i,t)}{x_i} = N_i.$$

2. Поточний аналіз станів дорожнього руху

$$\frac{Q_i T V_i}{\lambda_i} < \Gamma < \frac{Q_j T V_j}{\lambda_j}.$$

3. Оцінка завантаження вулиць і доріг

$$\frac{M(x_i t)}{Q_i V_i^2};\ \frac{l_a}{x_i};\ \frac{Ba}{V^2};\ \frac{\lambda_i(x_i t)}{\lambda_m}.$$

4. Управління рухом груп автомобілів

$$\frac{J_i}{J_{on}} = \frac{\lambda_i/V_i}{\lambda_{on}/V_{on}};\ \frac{Q_{on}x_s}{\lambda_{on}};\ \frac{V_i}{\lambda_i} \leq J_{on} \leq \frac{V_{OO}}{\lambda_{on}}.$$

5. Виявлення заторів з порушення безперервності потужності потоку

$$\frac{(n-1)\left\{min\left[M\left(x_{i,j},t\right)_{j=1}^{n}\right]\right\}}{\sum_{j=1}^{n} M\left(x_{i,j},t\right) - min\left[\left(x_{i,j},t\right)_{j=1}^{n}\right]},$$

де *n* – число смуг руху, *j* – номер смуги.

6. Оцінка продуктивності дорожнього руху

$$\frac{Д_i(\lambda_{j=1},x_i)}{\lambda_i x_i};\ \frac{H_i(\lambda_{j=1},x_i,t)}{\lambda_i V_i}.$$

7. Оцінка станів безпеки: з дистанції $S_{on,i}\lambda_i/x_i$, з напруженості $V(x_i,t)/x_i^2/\lambda_i(x_i)$, з шуму прискорень

$$\frac{a_1 x}{V_i^2};\ \frac{V(x_i,t)}{V_0(x_i t)};\ \frac{Q(x_i,t)}{Q_m(x_i,t)}.$$

8. Показник координації управління в АСУ-Д

$$\frac{\beta_i(x_i,t)}{\beta_n(x_i,t)} = \frac{L_i V_i(x_i,t)}{L_n V_n(x_i,t)} \leq 1.$$

Кількість і тип алгоритмів залежить від вибраної стратегії управління.



Список джерел інформації:

Алабужев, И.Д. (1968). *Теория подобия и размерностей. Моделирование*. Москва: Высшая школа. (російск.)

Вильсон, А.Дж. (1978). *Энтропийные методы моделирования сложных систем*. Москва: Наука. (російск.)

Гук, В.І. і Шкодовський, Ю.М. (2009). *Транспортні потоки: теорія та її застосування в урбаністиці: монографія*. Харків: «Золоті сторінки».

Гухман, А.А. (1973). *Введение в теорию подобия: у чебн.пособие для вузов*. 2-е изд. Москва: Высшая школа. (російск.)

Иванов, М.Г. (2019). *Размерность и подобие*. Москва: МФТИ. (російск.)

Крамаренко, Н.В. (2021). Обзор способов вывода критериев подобия в механике. *Вестник Самарского государственного технического университета*, *1*(25), 163-192. (російск.)

Крамаренко, Н.В., Ситнов К.В. (2014). Теория подобия и спецэффекты в кино. Наука. Промышленность. Оборона. Всероссийская научно-техническая конференция, 347-351. Новосибирск: НГТУ. (російск.)

Кутателадзе, С.С. (1986). *Анализ подобия и физические модели*. Новосибирск: Наука. (російск.)

Сигорский, В.П. (1975). *Математический аппарат инженера*. Киев: Техніка. (російск.)

Фирсов, А.Н., Журавская, А. (2020). О методах теории подобия и размерности. *Сборник научных трудов XXIV Международной научной и учебно-практической конференции: в 3 частях. Системный анализ в проектировании и управлении*, 121-131. Санкт-Петербург: Политех-Пресс. (російск.)